

确定先期固结压力数学模型的研究与应用*

郎林智^① 项伟^{①②} 楼蓉蓉^① 贾海梁^①

(^①中国地质大学(武汉)工程学院 武汉 430074)

(^②教育部长江三峡库区地质灾害研究中心 武汉 430074)

摘要 地基不均匀沉降一直是困扰工程建设者的一个难题,而土体的先期固结压力则是预测地基沉降量和采取预防措施的一个重要参数。利用基于 Matlab 软件自主开发的复合工具箱 CFSPT(Curve Fitting Solving and Plotting Tool),结合太原市地面沉降中最为常见的粉质黏土,研究分析了现有 5 种数学模型和本人引入的 Gauss1、Gauss2 模型对确定粉质黏土先期固结压力的适用性和数学模型确定的先期固结压力与《土工试验方法标准》中经验法确定值的差异,并分析了如何选择最优数学模型确定先期固结压力。结果表明:7 种数学模型回归分析程度均很高,但仅 Gauss1 模型确定的先期固结压力与《土工试验方法标准》中的经验法确定的值最为接近;最优数学模型应当满足 $e \sim \lg p$ 曲线在初始端趋于一非零定值,在末端趋近于 0,中间段曲线要收敛于一条斜直线。

关键词 先期固结压力 数学模型 复合工具箱 数值作图法

中图分类号:TU431 文献标识码:A

MATHEMATIC MODELS FOR DETERMINING PRE-CONSOLIDATION PRESSURE AND APPLICATION

LANG Linzhi^① XIANG Wei^{①②} LOU Rongrong^① JIA Hailiang^①

(^①Faculty of Engineering China University of Geosciences, Wuhan 430074)

(^②Three Gorges Research Center of Geo-Hazard, Ministry of Education, Wuhan 430074)

Abstract Pre-consolidation pressure is an important parameter which can help civil engineers predict foundation settlement, take preventive measures and finally solve the problem. This paper analyzes applicability of existing five mathematical models and originally used Gauss1 & Gauss2 models to determine pre-consolidation pressure of silt clay. It examines the difference between the determined pre-consolidation pressure values with those mathematical models and that with the empirical method of standard for test methods of earthworks. It then suggests how to choose optimal mathematical model to determine pre-consolidation pressure through researched CFSPT by Matlab. It is shown that though seven mathematical models all have a high fitting degree, only the pre-consolidation pressure of Gauss1 model approaches that of empirical method. Besides, the optimal mathematical model should have such characters that $e\text{-}\lg p$ curve converges a constant of nonzero at start, zero at end, and the middle of $e\text{-}\lg p$ curve converges a skew line.

Key words Pre-consolidation pressure, Mathematical models, CFSPT, Numerical mapping method

* 收稿日期: 2012-06-20; 收到修改稿日期: 2012-07-17.

第一作者简介:郎林智,主要研究方向为岩土体的类型与性质. Email: qqlz2008@126.com

1 引言

先期固结压力是天然土体在地质历史时期所经受的最大有效固结压力。在地基沉降计算中,先期固结压力是反映土体所受应力历史和预测地基沉降量的重要计算参数^[1~3]。因此,准确地确定先期固结压力十分重要。

目前国内外确定先期固结压力的标准做法:现场采取原状土样,密封包装后运送到实验室;根据室内固结试验计算相应的孔隙比,按照《土工试验方法标准》推荐的 Casagrande 经验作图法(以下简称经验法)^[2~5]确定其值。但经验法一般采用手工绘图,绘图繁琐,并受人为主观因素的影响,准确性不高。基于经验法国内外先后提出了采用多项式^[6~8]、Harris 模型^[9]、Logistic、Gompertz 模型^[10]和 Gaussian 模型来回归分析 $e \sim \lg p$ 曲线,进而求解先期固结压力。Logistic 和 Gompertz 是 Gregory 等人研究耕植土的压缩性质时提出的数学模型,三次和四次多项式模型主要被应用于研究黏土的压缩性质,Harris 模型研究土体类型的目前还不明确,本人在分析总结以上模型的基础上引入了 Gauss1 和 Gauss2 模型。对于以上数学模型是否适用于确定粉质黏土的先期固结压力,土体的先期固结压力是否与数学模型有着必然的关系,经验法与数学模型确定的先期固结压力有何差异以及如何选择最优数学模型确定土体的先期固结压力。基于此,本文利用基于 Matlab 软件自主开发的可视化效果好,可开发性强的复合工具箱 CFSPT,以华北地区较为常见的粉质黏土为例,研究分析了以上问题。

2 国内外现有的数学模型

2.1 多项式模型

项式越多,回归分析效果可能越好,但会出现曲线病态扭曲。

$$e = \sum_{i=0}^m a_i (\lg p)^i \quad (1)$$

式中, e 为孔隙比; p 为固结压力; a_i 为待定的常数, $i=0,1,2,\dots$; m 为多项式的项数,本文仅讨论应用广泛的三项式($i=3$)和四项式模型。三项式模型仅有3个待定参量,且其物理意义易于确定,因而在回归分析中备受青睐。四项式模型回归分析效

果好,但待定参量含有4个。

2.2 Harris 模型

$$e = \frac{1}{a + b(\lg p)^c} \quad (2)$$

2.3 Logistic 模型

$$e = a + c(1 + e^{b(\lg p - d)})^{-1} \quad (3)$$

2.4 Gompertz 模型

$$e = a + ce^{-e^{b(\lg p - d)}} \quad (4)$$

式中, e 为孔隙比; p 为固结压力; a, b, c 和 d 为待定的常数。

2.5 Gaussian 模型

$$e = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_i}{c_i}\right)^2} \quad (5)$$

式中, e 为孔隙比; p 固结压力; a_i, b_i 和 c_i 为待定系数。当 $n=1$,称作一项式 Gaussian 模型,记为 Gauss1; $n=2$,称作二项式 Gaussian 模型,记为 Gauss2。本文只分析 $n=1, 2$ 的情况。

3 数值作图法

为便于将 Casagrande 经验作图转换为计算机绘图,本文引入数值作图法的定义。数值作图法:选择数学模型回归分析得到 $e \sim \lg p$ 曲线,并得到其数学表达式即 $e = f(\lg p)$ 的形式;根据式 2-1 得到曲率的数学曲线方程 $k = F(\lg p)$,借助数值计算找到曲率 k 在 $\lg p \in [1.1, 3.6]$ (由于侧限固结实验的固结压力 p 在 12.5 ~ 4000kPa,所以 $\lg p$ 在区间 [1.1, 3.6] 内取值)取极大值时对应的 $\lg p_m$;根据高等数学中曲率半径的定义^[11], $\lg p_m$ 对应的点即为最小曲率半径点;过点 $(\lg p_m, e_m)$ 分别作水平直线 m_1 和切线 m_2 并求得 m_2 的斜率,再得到 m_1 与 m_2 之间的角平分线 m_3 的方程 $y = ax + b$;由最后两组数据或其他方法回归分析得到末端压缩直线 m_4 的方程 $y = cx + d$;最终通过解方程组得到先期固结压力。

$$k = \frac{|e''|}{(1 + (e')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

4 数值作图法的实现工具

为便于数值作图法的方便实施和深入地研究以

上7种数学模型对确定粉质黏土先期固结压力的适用性,本人基于 Matlab 软件自主开发了集曲线回归分析、绘图和求解前期固结压力的复合工具箱 CFSPT(图1),CFSPT 主要由4部分组成:数据录入转换模块 GDT、曲线回归分析模块 CFT、曲率极大值搜索与绘图模块 FMC&PT 和先期固结压力求解与绘图模块 SP&PT。

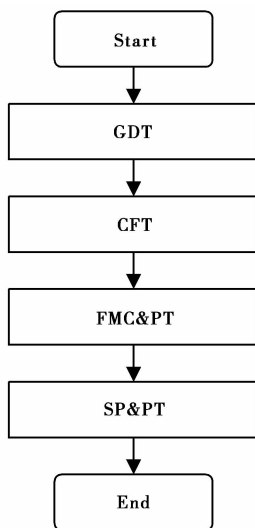


图1 复合工具箱程序框图

Fig. 1 Program layout of CFSPT

(1)数据采集转换模块 GDT。该模块是将侧限固结试验数据即固结力 p 、变量 S 和初始孔隙比 e_0 采集到计算机内,并将固结力 p 及其对应的变量 S 转化为 $(\lg p, e)$ 。

(2)曲线回归分析模块 CFT。此模块的主要功能是根据选择的回归分析模型将 $(\lg p, e)$ 按照非线性最小二乘法原理^[12, 13]进行回归分析,同时将最后的2~3组实验数据按照线性最小二乘法回归分析得到压曲线末端直线方程,并将回归分析参数输出,以供结果分析和进一步程序处理。此外,该模块除包含了以上7种曲线回归分析模型外还能根据研究者的需要加载其他的数学模型以供对现有模型的改进。

(3)曲率极大值搜索与绘图模块 FMC&PT。该模块具有在给定的区间范围内搜索曲线曲率极大值点即最小曲率半径,绘制曲率曲线和输出曲率极大值点的功能。绘制曲率曲线和输出曲率极大值点的目的是检验计算机搜索到的数值是否为曲率极大值和判别曲率曲线上是否具有多个曲率极大值。极大值的搜索方法采用离散元的思想即将设置的区间 $[a, c]$ 按照规定的精度 b 离散成 $(\lg p)_i = a + b * (i$

- 1) 一系列值,再分别计算出其对应的曲率值 k ,最后经过判别确定曲率极大值。

(4)先期固结压力求解与绘图模块 SP&PT。此模块具有绘制各种曲线的功能,如 $e \sim \lg p$ 曲线、压缩曲线的末端直线、过极大值点的水平直线和切线,以及切线与水平线间的平分线等。

5 实例分析与讨论

5.1 实例分析

通过复合工具箱 CFSPT 对取自于华北地区太原市的粉质黏土进行了研究分析(表1和图2~4)。

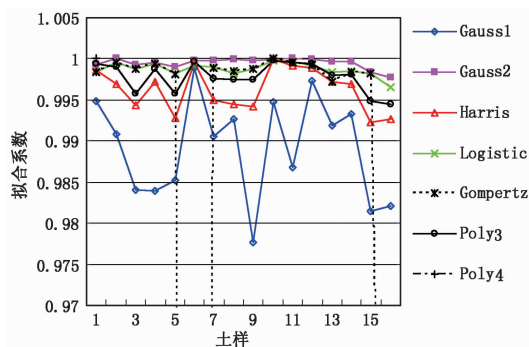


图2 不同模型下的曲线回归分析相关性系数

Fig. 2 The curve fitting correlation coefficient of different model

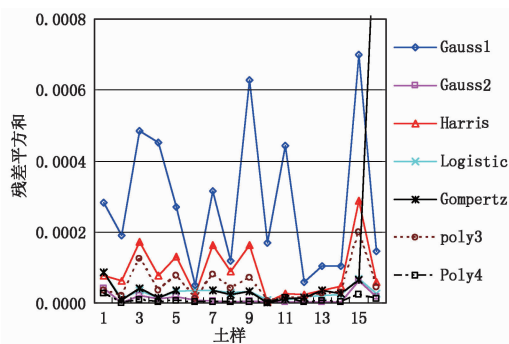


图3 不同模型下的残差平方和

Fig. 3 Residual error sum of squares of different model

由图2和图3可知,7种数学模型的回归分析相关系数基本都在0.98以上,残差平方和的数量级为 10^{-4} 。这表明7种模型对实验数据的回归分析程度都比较高,尤其 Gauss2、Harris、Logistic、Poly3 和 Poly4 对实验数据的回归分析程度非常高,回归分析效果非常好。但图1表明,Logistic、Gompertz、Poly3 和 Poly4 等4种数学模型在 $\lg p \in [1.1, 3.6]$ 基本都不存在曲率极大值点即最小曲率半径 R_{\min} ,无法

表 1 采样区各土样物理、力学性质指标

Table 2 Physical-mechanical parameters of samples taking from testing zone

土样	取土深度 H/m	含水率 $\omega/(\%)$	天然密度 ρ	孔隙比 e_0	饱和度 $s_r/(\%)$	塑性指数 I_p	液性指数 I_L	压缩模量 E_s/MPa	定名
1	91.00 ~ 91.20	26.2	2.71	0.719	98.8	12.6	0.31	7.16	粉质黏土
2	93.73 ~ 93.93	21.5	2.72	0.604	96.8	13.9	0.23	9.44	粉质黏土
3	100.12 ~ 100.32	30.3	2.73	0.815	100	16.2	0.24	10.68	粉质黏土
4	101.95 ~ 102.15	23.6	2.73	0.696	92.6	16.8	0.1	7.37	粉质黏土
5	107.10 ~ 107.30	20.5	2.73	0.574	97.5	15.9	-0.03	11.24	粉质黏土
6	109.70 ~ 109.90	21.4	2.73	0.571	100	15.6	0.04	12.09	粉质黏土
7	123.44 ~ 123.64	25.2	2.72	0.653	100	14.2	0.12	8.27	粉质黏土
8	127.13 ~ 127.33	32.2	2.73	0.89	98.8	16.3	0.25	15.75	粉质黏土
9	149.20 ~ 149.40	29.9	2.73	0.8	100	15.7	0.18	10	粉质黏土
10	151.43 ~ 151.63	24.5	2.72	0.668	99.8	14	0.28	9.27	粉质黏土
11	153.80 ~ 154.00	20.2	2.72	0.595	92.3	14.8	0.16	11.39	粉质黏土
12	156.30 ~ 156.50	25.1	2.7	0.672	100	10.5	0.25	8.36	粉质黏土
13	165.90 ~ 166.10	24.9	2.71	0.701	96.3	13	0.27	8.1	粉质黏土
14	166.80 ~ 167.00	18.5	2.7	0.616	81.1	10.3	0.25	13.47	粉质黏土
15	178.14 ~ 178.34	18.5	2.7	0.632	79	10.1	0.22	13.6	粉质黏土
16	184.88 ~ 185.08	24.7	2.73	0.661	100	15.3	-0.08	15.1	粉质黏土

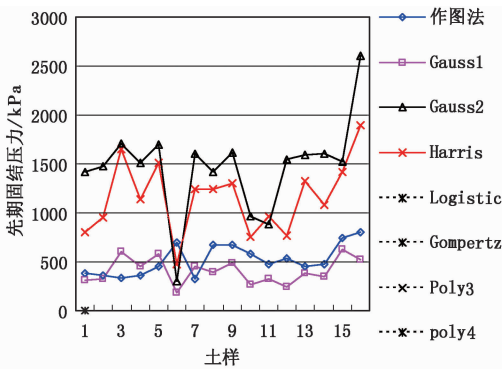


图 4 不同模型确定的先期固结压力

Fig. 4 Pre-consolidation pressure of different models

Logistic, Gompertz, Poly3, Poly4 在 $\lg p \in [1.1, 3.6]$, 均不存在最小曲率半径 R , 故无法确定先期固结压力

确定先期固结压力。因而, 仅以回归分析程度来评价数学模型的优劣是不合理的, 还应当充分考虑数学模型在 $\lg p \in [1.1, 3.6]$ 是否有最小曲率半径。此外, 通过图 3 还可以得出, Logistic、Gompertz、Poly3 和 Poly4 不适合作为确定粉质黏土先期固结压力的数学模型。

图 3 显示 Gauss1、Gauss2 和 Harris 模型都能得到土体的先期固结压力, Gauss2 和 Harris 确定的值都明显大于经验法确定的先期固结压力, 而且差别比较大; Gauss1 得到的先期固结压力相对于 Gauss2

和 Harris 较接近经验法确定的值, 但仍具有一定差异。对于数值作图法来讲, 7 种数学模型分别确定的先期固结压力也各不相同, 而且差异还很大。

5.2 原因探讨

经验法与数值作图法确定的先期固结压力不同的原因分析。首先, 2 种方法确定的 $e \sim \lg p$ 曲线不同, 甚至差别较大。经验法根据人的经验判断来绘制 $e \sim \lg p$ 曲线, 对实验数据的回归分析程度较低; 数值作图法采用数学模型来回归分析实验数据, 回归分析精度较高。其次, 2 种方法判断最小曲率半径点位置的途径不同。经验法根据人的眼睛并借助绘图工具确定最小曲率半径点的位置, 并且最小曲率半径点的位置受绘图比例影响较大; 而数值作图法根据严格的函数推导来确定最小曲率半径点的位置, 不受绘图比例影响。再之, 经验法受人为不确定因素影响较大, 而数值作图法不存在人为的影响。

数值作图法中不同数学模型确定的先期固结压力不同的原因分析。根据 Casagrande 的原始文献, 将经验法转化到数值作图法时, 数学模型至少要满足 3 个条件。为便于讨论, 本文将这 3 个条件定义为初始边界条件、中间边界条件和末边界条件。条件如下:

初始边界条件

$$\lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{\lg p \rightarrow 0} f(\lg p) = e_0, \text{ 物理意义: 初始状态下,}$$

土体孔隙比 e 为一非 0 定值。

中间边界条件

当固结压力 p 达到一定值时, $e \sim \lg p$ 曲线趋于一条斜直线。

末边界条件

$$\lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e = \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} f(\lg p) = 0, \text{ 物理意义: 固结压力}$$

达到较大值时, 孔隙比 e 趋于 0。

$$\text{Poly3、Poly4 等多项式模型: } \lim_{\lg p \rightarrow 0} e =$$

$$\lim_{\lg p \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m a_i (\lg p)^i = 0, \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e = \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^m a_i (\lg p)^i = \infty。$$

多项式模型满足初始边界条件, 但不满足末边界条件的。

$$\text{Harris 模型: } \lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{x \rightarrow \lg p} \frac{1}{a + b(\lg p)^c} = \frac{1}{a}, \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e$$

$$= \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} \frac{1}{a + b(\lg p)^c} = 0, \text{ 满足初始末边界条件。}$$

Logistic 模型:

$$\lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{\lg p \rightarrow 0} (a + c(1 + e^{b(\lg p - d)})^{-1}) = a + c(1 +$$

$$e^{-bd})^{-1}, \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e = \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} (a + c(1 + e^{b(\lg p - d)})^{-1}) = a \text{ 或 } a + c$$

Logistic 模型满足初始边界条件, 但只有当 $a = c = 0$ 或 $a + c = 0$ 时才满足末边界条件, 事实证明难以满足此条件。

Gompertz 模型:

$$\lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{\lg p \rightarrow 0} (a + ce^{-e^{b(\lg p - d)}}) = a + ce^{-e^{-bd}}, \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e =$$

$$\lim_{\lg p \rightarrow +\infty} (a + ce^{-e^{b(\lg p - d)}}) = a \text{ 或 } a + c。 \text{ 模型也满足初始}$$

边界条件, 但只有当 $a = c = 0$ 或 $a + c = 0$ 时才满足末边界条件, 事实证明难以满足此条件。

Gauss1 模型:

$$\lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{\lg p \rightarrow 0} a_1 \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_1}{c_1}\right)^2} = a_1 \cdot e^{-\left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2}, \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e =$$

$$\lim_{\lg p \rightarrow +\infty} a_1 \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_1}{c_1}\right)^2} = 0, \text{ 模型满足始末边界条件。}$$

$$\text{Gauss2 模型: } \lim_{\lg p \rightarrow 0} e = \lim_{\lg p \rightarrow 0} (a_1 \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot$$

$$e^{-\left(\frac{\lg p - b_2}{c_2}\right)^2}) = a_1 \cdot e^{-\left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot e^{-\left(\frac{b_2}{c_2}\right)^2}$$

$$\lim_{\lg p \rightarrow +\infty} e = \lim_{\lg p \rightarrow +\infty} (a_1 \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot e^{-\left(\frac{\lg p - b_2}{c_2}\right)^2})$$

$= 0$, 模型满足始末边界条件。

以上分析表明 Poly3、Poly4、Logistic 和 Gompertz 均不能完全满足 Casagrande 法的始末边界条件, 因而这 4 种模型均不适合作为数值作图法确定土体先

期固结压力的数学模型。所以也就不难理解这 4 种模型得不到先期固结压力的原因了。

中间边界条件是导致 Gauss1、Gauss2 和 Harris 模型确定的先期固结压力不同的原因。对以上 3 种模型的大量图形分析表明, 3 种模型的曲线都如图 5 所示。曲线由 I ~ III 段组成, 而 II 段曲线开始逼近直线 l 的位置以及逼近程度将直接影响最小曲率半径点的位置, 进而影响先期固结压力的确定。反映 II 段曲线开始逼近直线 l 的位置以及逼近程度的参数是所选数学模型的一阶导数和二阶导数, 对 Gauss1、Gauss2 与 Harris 的一阶导数、二阶导数分析表明, Gauss1 模型的 II 段曲线逼近直线 l 的效果最好即 Gauss1 模型计算先期固结压力的过程为更接近于 Casagrande 经验作图法, 因而其确定的先期固结压力较为接近于经验法确定的值。与 Gauss2、Harris 模型相比, 尽管 Gauss1 模型较好, 但仍不完美 (Gaussian 模型计算先期固结压力的过程详见文献 [14])。另外, 对于工程行业中用于计算先期固结压力的商业软件, 其数学模型也不外乎于以上几种, 其计算过程如一黑匣子, 往往只知结果, 不知来由。其结果的实用性值得思考。

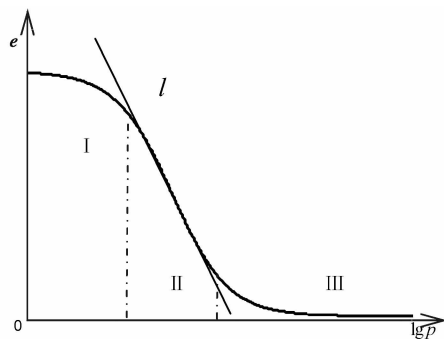


图 5 三种模型的典型曲线

Fig. 5 The typical curve of three models

从以上分析可以得出, 在数值作图法中, 完美的数学模型除了满足始末边界条件外, 还应满足当固结压力 p 达到一定值时, $e \sim \lg p$ 曲线收敛于一条斜直线再趋近于 0 点。用数学语言来描述: $e \sim \lg p$ 曲线在初始端趋于非 0 定值, 在末端也趋近于 0, 中间段曲线斜率为定值。

6 结论

(1) Poly3、Poly4 等多项式不适合作为确定土体先期固结压力的数学模型; Logistic 和 Gompertz 模

型不适合作为高压固结条件下确定粉质黏土先期固结压力的数学模型; Gauss1、Gauss2 和 Harris 模型都能确定粉质黏土的先期固结压力,但只有 Gauss1 模型确定的先期固结压力与经验法确定的值最为接近。

(2)数值作图法确定土体先期固结压力时至少要综合考虑 3 个因数:数学模型对实验数据的回归分析情况,回归分析曲线在 $\lg p \in [1.1, 3.6]$ 是否具有最小曲率半径,数学模型的曲线形状和收敛性。确定土体先期固结压力的完美数学模型应当满足: $e \sim \lg p$ 曲线在初始端趋于非 0 定值,在末端也趋于 0,间段曲线要收敛于中一条斜直线。

(3)工程行业中用于计算先期固结压力的商业软件如一黑匣子,往往只知结果,不知来由。其结果的实用性值得商榷。

参 考 文 献

- [1] 刘用海,朱向荣,常林越.基于 Casagrande 法数学分析确定先期固结压力[J].岩土力学,2009,30(1):211~214.
Liu Yonghai, Zhu Xiangrong, Chang Linyue. Determining preconsolidation pressure by mathematic analysis based on casagrande method. Rock and Soil Mechanics, 2009,30(1):211~214.
- [2] Casagrande A. The determination of the preconsolidation load and its practical significance[J]. Proc. of First ICMFE, 1936,(3):60~64.
- [3] 陈仲颐,周景星,等.土力学[M].北京:清华大学出版社,1994.
Chen Zhongyi, Zhou Jingxing, et al. Soil Mechanics. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.
- [4] RF CRAIG. Soil Mechanics. Van Nostrand Reinhold(UK) Co. Ltd [R]: Department of Civil Engineering University of Dundee, 1983.
- [5] GB/T50123-1999 土工试验方法标准[S].北京:中国计划出版社,1999.
GB/T50123-1999 Standard for Soil Test Method. Beijing: China Planning Press, 1999.
- [6] 姜安龙,赵春风,高大钊.确定先期固结压力的数学模型法[J].岩土力学,2003,24(2):292~295.
Jiang Anlong, Zhao Chunfeng, Gao Dali. Mathematical model method of determining preconsolidation pressure. Rock and Soil Mechanics, 2003,24(2):292~295.
- [7] Arvidsson J, Keller T. Soil precompression stress I: A survey of Swedish arable soils[J]. Soil Tillage Res., 2004,77:85~95.
- [8] 张书宪.用计算机绘图确定先期固结压力的一种方法[J].岩土工程界,2000,3(8):45~46.
Zhang Shuxian. A method of computer graphing to determine the preconsolidation pressure. Geological Exploration for Non-ferrous Metals, 2000,3(8):45~46.
- [9] 王志亮,郑明新,李永池.求前期固结应力的数学模型研究及应用[J].岩土力学,2005,26(10):1587~1590.
Wang Zhiliang, Zheng Mingxin, Li Yongchi. Research on mathematic model method for calculating pre-consolidation pressure and its application. Rock and Soil Mechanics, 2005,26(10):1587~1590.
- [10] AS Gregory, WR Whalley, CW Watts, NRA Bird, PD Hallett, AP Whitmore. Calculation of the compression index and precompression stress from soil compression test data[J]. Soil & Tillage Research, 2006,89:45~57.
- [11] 李大华,林益,汤燕斌,等.工科数学分析[M].武汉:华中科技大学出版社,2007.
Li Dahua, Lin Yi, Tang Yanbin, et al. Mathematical Analysis for Engineering. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2007.
- [12] 邓聚龙.灰色系统基本方法[M].武汉:华中理工大学出版社,1987.
Deng Julong. The Basic Method of Gray System. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1987.
- [13] 傅立.灰色系统理论及其应用[M].北京:科学技术文献出版社,1992.
Fu Li. The Grey System Theory and Its Application. Beijing: Science and technology literature press, 1992.
- [14] 郎林智,陈鹏宇,等.基于 Gaussian 模型的先期固结压力确定[J].水电能源科,2011,29(7):47~49.
Lang Linzhi, Chen Pengyu. Research on preconsolidation pressure and its application based on gaussian model. Water Resources and Power, 2011,29(7):47~49.